Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB2
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 1 : Suites récurrentes

Dans ce chapitre, $I = [a, b]$ désigne soit un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{R}$ entier.

1 Définitions et exemples

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow I$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est dite **récurrente (d'ordre 1)**.

Attention ! Il est nécessaire que I soit stable par f (*ie* $\forall x \in I$, $f(x) \in I$), sinon l'existence de la suite (u_n) n'est pas assurée. Par exemple, si on regarde $u_0 = 2$, $u_{n+1} = \ln(u_n)$ et $I = \mathbb{R}_+$, on constate que $u_1 = \ln(2) \approx 0,69$; $u_2 \approx -0,36$; donc u_3 n'est pas défini.

Le lemme suivant permet de préciser cette remarque :

Lemme 2

Si I est stable par f, alors la suite

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est bien définie.

Démonstration. Par récurrence sur n.

- on définit $u_0 \in I$, donc u_0 est bien défini ;
- supposons que u_n existe et appartient à I. Alors $f(u_n) \in I$, puisque I est stable par f. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et appartient à I.

□

Exemples classiques de suites récurrentes (voir les exercices aussi) :

1. Suites arithmétiques : on considère $f : x \longmapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}$, et $I = \mathbb{R}$ (le plus souvent). On a alors :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = u_n + a \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Formule du lycée : $u_n = u_0 + na$.

2. Suites géométriques : on considère $f : x \longmapsto qx$, $q \in \mathbb{R}$, et $I = \mathbb{R}$ (le plus souvent). On a alors :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Formule du lycée : $u_n = u_0 q^n$.
3. Suites arithmético-géométriques : on considère $f : x \longmapsto qx + a$, $q, a \in \mathbb{R}$, et $I = \mathbb{R}$ (le plus souvent). On a alors :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = qu_n + a \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4. Suites homographiques : on considère $f : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, et $I = \mathbb{R}$ (le plus souvent). On a alors :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Si $c = 0$, on obtient une suite arithmético-géométrique.

Construction graphique :

Il est utile de savoir représenter les premiers termes d'une suite récurrente pour se faire une idée de son comportement. Voici la méthode :

1. Tracer le graphe de la fonction f ;
2. Tracer la droite $y = x$ sur le même graphique ;
3. Placer u_0 sur l'axe des abscisses ;
4. Placer $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées, puis reporter u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite $y = x$.
5. etc...

Un exemple :

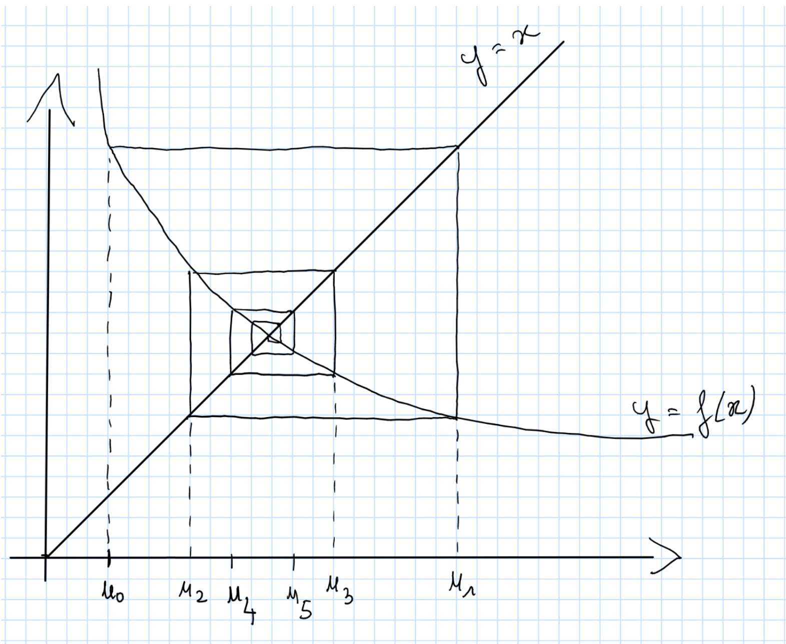

FIGURE 1 – Exemple de construction graphique

Sur cet exemple, on peut faire les conjectures suivantes :
-si f décroît, u_{2n} croît et u_{2n+1} décroît ;
-u_n converge vers un point fixe de f.

Dans la suite, on va essayer de formaliser ces observations.

2 Monotonie des suites récurrentes

Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 3

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \longrightarrow I$ laissant I stable et contenant u_0. Alors :

1. si f est croissante, alors (u_n) est monotone :
   - si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante ;
   - si $u_0 > u_1$, alors (u_n) est décroissante ;
2. si f est décroissante sur I, alors les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont monotones de sens contraire.

Démonstration.

1. Supposons f croissante et $u_0 \leq u_1$. Montrons que (u_n) est croissante par récurrence.
   - $u_0 \leq u_1$: OK au rang 1 ;
   - supposons qu'il existe n tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

   L'autre cas est similaire.
2. Supposons f décroissante. Posons $h = f \circ f$. h est croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = h(u_{2n})$ et de même $u_{2n+3} = h(u_{2n+1})$. On peut alors appliquer le point 1 :
   si $u_0 \leq u_2$, alors $u_1 \geq u_3$ car f est décroissante, et donc (u_{2n}) croît et u_{2n+1} décroît ;
   si $u_0 \geq u_2$, alors $u_1 \leq u_3$ car f est décroissante, et donc (u_{2n}) décroît et u_{2n+1} croît.

□

Voici une illustration pour le point 1 :

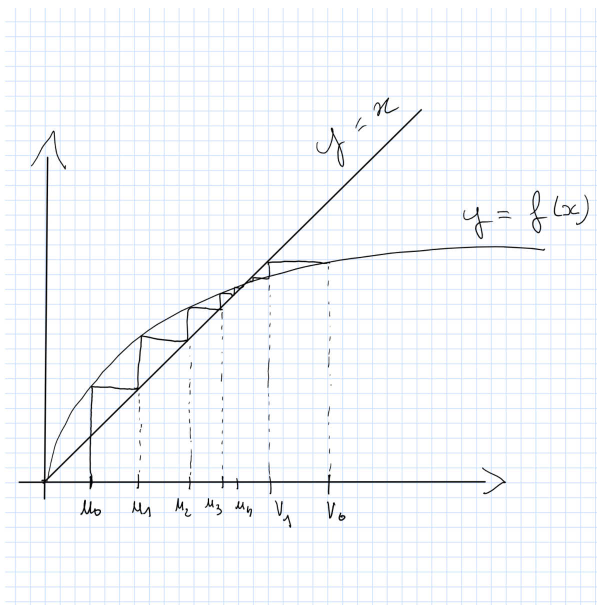

Figure 2 – Exemple de suites définie par une fonction croissante

Pour le point 2, on pourra regarder la figure 1.

Exemple :

Regardons la suite

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ici,

$$\begin{aligned} f :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

et bien sûr $u_{n+1} = f(u_n)$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $f'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $f([\sqrt{2}, 2]) = [\sqrt{2}, \frac{3}{2}] \subset [\sqrt{2}, 2]$. Ainsi l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ est stable par f et contient $u_0 = 2$, la suite est bien définie. f est croissante sur $[\sqrt{2}, 2]$. Comme $u_1 \leq u_0$, on déduit qui (u_n) est monotone et décroissante.

Proposition 4

Soit (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$, f définie sur I. Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$.
- si $g(x) \geq 0$ sur I, alors (u_n) est croissante ;
- si $g(x) \leq 0$ sur I, alors (u_n) est décroissante.

Démonstration. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
Si $g(x) \geq 0$ sur I, alors $f(u_n) - u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$;
Si $g(x) \leq 0$ sur I, alors $f(u_n) - u_n \leq 0$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. □

3 Convergence de suites récurrentes et points fixes

3.1 Points fixes

On a vu sur le figure 1 que la suite convergeait vers un point fixe de f. On va formaliser cette observation.

Définition 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Un **point fixe** de f est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque. *On a vu graphiquement qu'un point fixe de f est l'intersection de la courbe représentative de f et de la droite $y = x$.*

Théorème 6

Supposons $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, I stable par f, et supposons que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers $l \in I$. Alors l est un point fixe de f.

Démonstration. On a $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = l$. Comme f est continue sur I, elle l'est en particulier en $l \in I$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(f(u_n)) = f(l)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$. En passant à la limite, on obtient $f(l) = l$. □

Ainsi, les limites possibles de (u_n) sont à chercher parmi les points fixes de f. On retiendra que *si (u_n) converge, c'est vers un point fixe de f.* Il est donc important de savoir si une fonction admet des points fixes. Le théorème suivant permet de répondre à cette interrogation.

Théorème 7 (Points fixes)

Soit $f : I \longrightarrow I$ **contractante**, c'est à dire telle que

$$\exists 0 \leq K < 1 \text{ tel que } \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Alors f admet un unique point fixe $l \in I$.

Si de plus $\alpha \in I$, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers l.

Démonstration. On note $I = [a, b]$. Comme f est contractante, elle est continue sur I (vérifiez ceci). On va montrer l'existence, puis l'unicité du point fixe.

1. Existence : Posons $g : x \longmapsto f(x) - x$, continue sur I.
   - $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$;
   - $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \in [a, b]$.

   Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $l \in I$ tel que $g(l) = 0$, c'est à dire $f(l) = l$.
2. Unicité : Supposons que f admette deux points fixes l et l'. Alors $|f(l) - f(l')| \leq K|l - l'|$, ainsi $|l - l'| \leq K|l - l'|$, d'où $(1 - K)|l - l'| \leq 0$, puisque $(1 - K) > 0$.
   Finalement, $|l - l'| \leq 0$, donc $|l - l'| = 0$ et donc $l = l'$.

Si maintenant $\alpha \in I$, considérons $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ I est stable par f et contient $u_0 = \alpha$. (u_n) est bien définie et vérifie $a \leq u_n \leq b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - l| &= |f(u_n) - l| \\ &= |f(u_n) - f(l)| \leq K|u_n - l|. \end{aligned}$$

En réitérant ce procédé, on obtient
$$|u_{n+1} - l| \leq K^{n+1}|u_0 - l|.$$
Or, $0 \leq K < 1$, donc $K^{n+1} \longrightarrow 0$. Donc finalement, $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = l$. □

Il est donc nécessaire de savoir détecter si une fonction est contractante ou non. Le théorème des accroissements finis permet parfois de répondre. Normalement vous l'avez vu l'an dernier, il est donc rappelé sans preuve :

Théorème 8

Supposons f dérivable sur I et supposons

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |f'(x)| \leq M.$$

Alors $\forall a, b \in I$, $|f(a) - f(b)| \leq M|a-b|$.

Conséquence : si $0 \leq M < 1$, f est contractante !

3.2 Cas où f est croissante

On a vu que si f est croissante, alors (u_n) est monotone. Si I est de plus borné, on peut utiliser les résultats (bien connus) suivants :
- (u_n) croissante majorée $\Longrightarrow$ (u_n) converge ;
- (u_n) croissante non majorée $\Longrightarrow$ (u_n) diverge vers $+\infty$;
- (u_n) décroissante minorée $\Longrightarrow$ (u_n) converge ;
- (u_n) décroissante non minorée $\Longrightarrow$ (u_n) diverge vers $-\infty$.

3.3 Cas où f est décroissante

On a vu que si f décroît, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposé.

Définition 9

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :
1. (u_n) est croissante ;
2. (v_n) est décroissante ;
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Vous avez peut-être déjà vu ce théorème :

Théorème 10

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$, et on a $u_n \leq l \leq v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors $u_n \leq v_m \forall n, m \in \mathbb{N}$. En effet, s'il existait n, m tels que $u_n > v_m$, alors en prenant $k \geq \max(n, m)$, on aurait $u_k \geq u_n$ et $v_k \leq v_m$. Donc on aurait $u_k - v_k \geq u_n - v_m > 0$ (car $u_n > v_m$), et ainsi

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \geq u_n - v_m > 0 \textbf{ contradiction !!}$$

Ainsi, on obtient

$$u_0 \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ... \leq v_{n+1} \leq v_n \leq ... \leq v_0.$$

Donc (u_n) est croissante et majorée par v_0 et (v_n) est décroissante et minorée par u_0. Elles convergent donc. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)$.

□

Exercices

Exercice 1

Étudier chacune des suites suivantes (monotonie, limite...)

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ sur $I = [1, 2]$;
2. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n^3 + \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{9}$ sur $I = [0, \frac{1}{2}]$;
3. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi u_n}{2})$ sur $I = [0, 1]$;
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la suite donnée par $u_0 = a$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 2 [Examen rattrapage 2020-2021]

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est décroissante. Déduire que $[0, 1]$ est stable par f.
2. Faire un dessin des premiers termes de (u_n). Déduire de la question 1. les variations de (u_n).
3. Donner la définition d'un point fixe de f.
4. Calculer $\sup|f'|$ sur $[0, 1]$, et déduire que f est contractante.
5. Est-ce que (u_n) converge ? Si oui, vers quelle limite ? (Il n'est pas nécessaire d'en donner la valeur)

Exercice 3 (Suites arithmético-géométriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Trouver un réel l tel que $v_n := (u_n - l)$ soit géométrique.
2. Pour quelles valeurs de a, b la suite (un) converge-t-elle ?

Exercice 4

1. Étudier la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
2. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$. Étudier cette suite (v_n) en étudiant séparément selon que $v_0 \in]0, 1[$ ou non.

Exercice 5

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{x^3+1}{3}$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède 3 solutions réelles.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f.
3. Déduire le comportement de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.